УДК: 514.7, 514.82
DOI: 10.24411/2658-4441-2020-10040

М.П. КРАСИЛЬНИКОВ

Тувинский институт комплексного освоения природных ресурсов СО РАН (Кызыл, Россия)

ТЕНЗОР РИЧЧИ ЛЕВОИНВАРИАНТНЫХ ЛОРЕНЦЕВЫХ МЕТРИК НА ГРУППЕ ЛИ, АЛГЕБРА ЛИ КОТОРОЙ ЗАДАНА КОММУТАЦИОННЫМИ СООТНОШЕНИЯМИ $[e_4, e_1] = e_1; [e_4, e_2] = e_1 + e_2; [e_4, e_3] = e_3$.

Работа посвящена вычислению тензора Риччи левоинвариантных лоренцевых метрик на четырёхмерной разрешимой группе Ли, алгебра Ли которой задаётся коммутационными соотношениями $[e_4, e_1] = e_1; [e_4, e_2] = e_1 + e_2; [e_4, e_3] = e_3$. Найдены компоненты тензора Риччи и скалярная кривизна для метрик, которые можно автоморфизмами алгебры Ли привести к виду: $\begin{pmatrix} G_{ab} & 0 \\ 0 & G_{nn} \end{pmatrix}$, где $G_{nn} \neq 0$, а G_{ab} — невырожденная симметричная трёхмерная матрица.
Ключевые слова: левоинвариантная лоренцева метрика, разрешимая группа Ли, тензор Риччи, скалярная кривизна.
Табл. 1. Библ. 8. назв. С. 73–75.

M.P. KRASILNIKOV

Tuvinian Institute for Exploration of Natural Resources of SB RAS (Kyzyl, Russia)

RICCI TENSOR OF LEFT-INVARIANT LORENTZIAN METRICS ON THE LIE GROUP WHERE LIE ALGEBRA IS GIVEN BY COMMUTATION RELATIONS $[e_4, e_1] = e_1; [e_4, e_2] = e_1 + e_2; [e_4, e_3] = e_3$.

The paper is devoted to the computation of the Ricci tensor of left-invariant Lorentzian metrics on a four-dimensional solvable Lie group whose Lie algebra is given by commutation relations $[e_4, e_1] = e_1; [e_4, e_2] = e_1 + e_2; [e_4, e_3] = e_3$. The components of the Ricci tensor and the scalar curvature for the metrics are found which can be reduced by automorphisms of the Lie algebra to the form: $\begin{pmatrix} G_{ab} & 0 \\ 0 & G_{nn} \end{pmatrix}$, where $G_{nn} \neq 0$, and G_{ab} is a nondegenerate symmetric three-dimensional matrix.
Keywords: left-invariant Lorentzian metric, solvable Lie group, Ricci tensor, scalar curvature.
Table 1. References 8. P. 73–75.

Задание в алгебре Ли, отождествляемой с касательным пространством к соответствующей группы Ли в единице, метрики лоренцевой сигнатуры (+, +, +, -)) и разнесение этой метрики по всей группе Ли левыми сдвигами, превращает группу Ли в дифференцируемое лоренцево многообразие или пространство-время.

Вычисление тензора Риччи является одним из этапов общей схемы исследования левоинвариантных лоренцевых метрик на группах Ли (Левичев, 1986,1990). Знание тензора Риччи интересно и само по себе, а также может быть использовано для анализа причинной структуры лоренцева многообразия в силу следующей теоремы:

Теорема. Пусть лоренцево многообразие M диффеоморфно R^n, изотропно полно и в любой его точке $Ric(a,a) > 0$ при всех световых векторах $\vec{a} \in T_x(M)$. Тогда в M нарушается хронологическое условие. Здесь $T_x(M)$ — касательное пространство к многообразию M в точке x (Левичев, 1986, с. 4).

Ранее нами была исследована причинная структура левоинвариантных лоренцевых метрик на данной группе Ли (Красильников, 1988, 1989), однако без применения этой теоремы. Геодезическую полноту мы исследовали в работе (Красильников, 1990), а в работе (Красильников, 2019) нами в явном виде были найдены уравнения геодезических для двух из десяти возможных метрик.

В случае, если метрика автоморфизмами алгебры Ли может быть приведена к виду $\begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & G_{nn} \end{pmatrix}$, где G — $(n-1)$-мерная матрица, G_{nn} — скаляр, тензор Риччи и скалярная кривизна многообразия могут быть вычислены по следующим матричным формулам (Левичев, 1986; Гаврилов, 1984): $P = (G \cdot B + B^T \cdot G)/2$, $F = (G \cdot B - B^T \cdot G)/2$, $M = G^{-1} \cdot P$, $N = G^{-1} \cdot F$, $R_{ab} = G^{nn}(F \cdot M - P \cdot N - tr(B) \cdot P)$, $R_{nn} = -tr(M^2)$, $R = -G^{nn}\left(tr^2(M) + tr(M^2)\right)$. Здесь R — скалярная кривизна, а тензор Риччи имеет вид $\begin{pmatrix} R_{ab} & 0 \\ 0 & R_{nn} \end{pmatrix}$. В $= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ — матрица коммутационных соотношений алгебры Ли исследуемой группы Ли.

Результаты вычислений компонент тензора Риччи и скалярной кривизны представлены в *таблице 1*, где мы придерживаемся классификации метрик на данной группе из работы (Астраков и др., 1987).

Таблица 1. **Результаты вычислений компонент тензора Риччи и скалярной кривизны**

№	Метрика	Тензор Риччи	Скалярная кривизна
1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix} p > 0, q < 0$	$\begin{pmatrix} q\left(\frac{1}{2p} - 3\right) & -\frac{3}{2}q & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}q & q\left(-\frac{1}{2} - 3p\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 - \frac{1}{2p} \end{pmatrix}$	$-q\left(12 + \frac{1}{2p}\right)$
2a	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}$ $p, q > 0$	$\begin{pmatrix} q\left(\frac{1}{2p} - 3\right) & -\frac{3}{2}q & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}q & q\left(-\frac{1}{2} - 3p\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 - \frac{1}{2p} \end{pmatrix}$	$-q\left(12 + \frac{1}{2p}\right)$
2b	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}$ $p, q > 0$	$\begin{pmatrix} q\left(\frac{1}{2p} + 3\right) & \frac{3}{2}q & 0 & 0 \\ \frac{3}{2}q & q\left(\frac{1}{2} - 3p\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 + \frac{1}{2p} \end{pmatrix}$	$-q\left(12 - \frac{1}{2p}\right)$

Продолжение табл. 1

2c	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}$ $q > 0$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3q & 0 \\ 0 & -3q & -\frac{3}{2}q & 0 \\ -3q & -\frac{3}{2}q & \frac{1}{2}q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$	$-12q$
3	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}$ $p < 0, q > 0$	$\begin{pmatrix} q\left(\frac{1}{2p} - 3\right) & -\frac{3}{2}q & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}q & q\left(-\frac{1}{2} - 3p\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 - \frac{1}{2p} \end{pmatrix}$	$-q\left(12 + \frac{1}{2p}\right)$
4a	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}$ $q > 0$	$\begin{pmatrix} -3q & -\frac{3}{2}q & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}q & -\frac{1}{2}q & -3q & 0 \\ 0 & -3q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$	$-12q$
4b	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}$ $q > 0$	$\begin{pmatrix} 0 & -3q & 0 & 0 \\ -3q & -3q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$	$-12q$

ЛИТЕРАТУРА

Астраков СН., Левичев А.В., Репнин А.Е. Канонический вид левоинвариантых лоренцевых метрик на одной четырёхмерной группе Ли // Сиб. мат. журн. – 1987. – Т. 28. – 21 с. – Деп. в ВИНИТИ 05.12.86 № 8331-В.

Гаврилов С.П. Левоинвариантные метрики на односвязных группах Ли, содержащих абелеву подгруппу коразмерности 1 // Гравитация и теория относительности: Вып. 21. – Казань: КГУ, 1984. – С. 13–47.

Красильников М.П. Причинная структура геодезически полных левоинвариантных лоренцевых метрик на одной четырёхмерной группе Ли // Сиб. мат. журн. – 1988. – Т. 29. – 10 с. – Деп. в ВИНИТИ 09.03.88, № 2997-В88.

Красильников М.П. Причинная структура левоинвариантных лоренцевых метрик на одной четырёхмерной группе Ли // Топологические пространства и их отображения. – Рига, 1989. – С. 81–85.

Красильников М.П. Геодезические левоинвариантных Лоренцевых метрик на одной четырёхмерной группе Ли // Ленинское идейно-теоретическое наследие и перестройка системы народного образования: Тез. докл. Респ. науч.-практ. конф., посвящ. 120-летию со дня рожд. В.И. Ленина (16–20.04.1990, Кызыл). – Кызыл, 1990. – С. 117–118.

Красильников М.П. Геодезические двух левоинвариантных лоренцевых метрик на группе Ли, алгебра Ли которой задана коммутационными соотношениями $[e_4, e_1] = e_1$; $[e_4, e_2] = e_1 + e_2$; $[e_4, e_3] = e_3$ // Природные ресурсы, среда и общество: Вып. 1 / Отв. ред. канд. социол. наук Т.М. Ойдуп [Электрон. ресурс: 2019]. – Кызыл: ТувИКОПР СО РАН, 2019. – С. 66–69. – Режим доступа: http://tikopr-journal.ru/, свободный.

Левичев А.В. Некоторые методы исследования причинной структуры однородных лоренцевых многообразий. – Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1986. – 40 с. (препринт № 20).

Левичев А.В. Методы исследования причинной структуры однородных лоренцевых многообразий // Сиб. мат. журн. – 1990. – Т. 31. – № 3. – С. 39–54.