

РАЗДЕЛ IV. МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ [MATHEMATICS. MATHEMATICAL MODELING]

УДК 504.3.054

А.И. ЖДАНOK^{1, 2, 3}, А.К. ХУРУМА³

¹ *Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (Москва, Россия)*

² *Тувинский институт комплексного освоения природных ресурсов СО РАН (Кызыл, Россия)*

³ *Тувинский государственный университет (Кызыл, Россия)*

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЗАГРЯЗНЕНИЯ ЭКОСФЕРЫ ГОРОДА КЫЗЫЛА ДЫМОМ ТЭЦ НА ПРИМЕРЕ РТУТИ

Рассмотрены две одномерные математические модели процесса загрязнения экосферы города Кызыла дымом ТЭЦ, частично разработанные авторами данной статьи. Оценивание неизвестных параметров модельных функций распределения концентрации загрязняющих веществ проводилось на базе экспериментальных данных по пробам снега, взятых в конце снежного сезона 2017 г. Методами статистического анализа для нелинейных модельных функций получены результаты их идентификации по загрязняющему элементу «Ртуть» (Hg) в четырёх направлениях (румбах) по азимуту от трубы ТЭЦ. Произведены прогнозные расчёты концентрации ртути в точках, отсутствующих в базе данных. Приведён алгоритм определения доли вклада дыма ТЭЦ и других источников в общее загрязнение атмосферы г. Кызыла

Ключевые слова: математическое моделирование, загрязнение атмосферы, загрязнение снежного покрова, одномерные модели, идентификация моделей по экспериментальным данным, оценивание параметров.

Рис. 13. Табл. 4. Библ. 12 назв. С. 63–75.

A.I. ZHDANOK^{1, 2, 3}, A.K. KHURUMA³

¹ *Institute for Information Transmission Problems RAS (Moscow, Russia),*

² *Tuvan Institute for Exploration of Natural Resources of SB RAS (Kyzyl, Russia),*

³ *Tuvan State University (Kyzyl, Russia)*

SOME RESULTS OF MATHEMATICAL MODELING OF KYZYL CITY ECOSPHERE POLLUTION WITH SMOKE FROM A THERMAL POWER PLANT AS MERCURY CASE STUDY

Two mathematical one-dimensional models of the pollution process of the Kyzyl ecosystem by the smoke from the heat power station (HPS) are considered. The models are partially developed by the authors of this article.

The unknown parameters of the model distribution functions of the concentration of pollutants were estimated based on the experimental data on snow samples taken at the end of the 2017 snow season. Using statistical analysis methods for nonlinear model functions, the results of their identification by the “Mercury” (Hg) polluting element in four directions in azimuth from the HPS pipe were obtained. Predictive calculations of mercury concentration at points that are not in the database were made. An algorithm for determining the contribution to the total atmospheric pollution of Kyzyl from smoke of the HPS plants and other sources is presented.

Keywords: mathematical modeling, air pollution, snow pollution, one-dimensional models, identification of models from experimental data, parameter estimation.

Figures 13. Tables 4. References 12. P. 63–75.

ВВЕДЕНИЕ. Процесс загрязнения атмосферы и почвы города Кызыла дымом ТЭЦ является многолетней острой проблемой в его экологии. Специфика географических, климатических и метеорологических условий приводит к тому, что в зимний отопительный период над городом образуется малоподвижное облако смога, содержащее большое количество токсичных загрязняющих веществ (ЗВ), выпадающих на снежную поверхность, а затем поступающих в почву на территории города и его окрестностей.

Другими мощными источниками ЗВ в атмосфере и почве города Кызыла являются небольшие котельные различных предприятий, а также отопительные печи частных домов из ряда обширных микрорайонов города и его пригородов. Во всех этих печах сжигается низкокачественный местный уголь.

Разумеется, в настоящее время актуальной становится и проблема загрязнения атмосферы выхлопными газами резко возросшего общего парка автотранспорта города Кызыла. Однако, эта проблема такая же, как и во всех средних городах России, и мы её здесь касаться не будем.

Основное внимание в настоящей работе уделяется процессу загрязнения экосферы города Кызыла дымом ТЭЦ. Порождаемое им облако ЗВ распространяется по территории города и далее в соответствии с изменяющейся розой ветров, т.е. мы имеем динамическое во времени техногенное явление. Для изучения подобных явлений обычно используются методы математического моделирования.

Авторы настоящей работы уже ряд лет системно занимаются математическим моделированием процесса загрязнения экосферы г. Кызыла дымом ТЭЦ и печей частного сектора. Основные полученные ими результаты представлены в опубликованных работах (Жданок, 1999, 2011; Жданок и др., 2015 *а, б*; 2016, 2017 *а, б, в*; 2018 *а, б*). Настоящая работа является их продолжением.

В своих исследованиях загрязнения экосферы города Кызыла авторы используют следующую общепринятую в таких проблемах методологию. Поскольку прямое измерение концентрации многих различных ЗВ в движущемся воздухе на различных высотах в наших условиях практически невозможно, то измерению подвергается концентрация ЗВ, оседающих из воздуха на снежную поверхность города в период отопительного сезона. Считается, что концентрация ЗВ в снеге адекватно характеризует концентрацию ЗВ в воздухе. Сбор проб снега обычно производится в марте перед началом его таяния в соответствии с разработанным нами заранее планом взятия проб. Затем эти пробы снега подвергаются обработке в специализированной лаборатории, которая и выдаёт концентрацию различных ЗВ в каждой пробе.

В настоящей работе разработанные нами ранее модельные функции распределения концентрации ЗВ при их распространении с дымом ТЭЦ идентифицируются по новой экспериментальной базе проб снега, взятых в 39 точках в 2017 г. (точки на *рисунке 1* отмечены зелёным цветом). Ранее все наши исследования проводились на базе экспериментальных данных 2016 г. и более ранних.

В 2015–2017 гг. наши исследования в этой области были поддержаны грантом РФФИ и Республики Тыва (Проект № 15–41–04314_р_сибирь_а), за счёт которого и была заказана и получена новая база экспериментальных данных 2017 г.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ И МОДЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ КОНЦЕНТРАЦИИ ЗВ

Нанесём на карту (план) г. Кызыла декартовы оси координат с началом (центром) в точке расположения Кызылской ТЭЦ на Запад, и с осью ОУ, направленной от ТЭЦ на Север. Углы центрированных направлений φ будем отсчитывать от оси ОХ против часовой стрелки. Тогда направлению от ТЭЦ на Запад будет соответствовать угол

$\varphi=0^\circ$, направлению на Юг — угол $\varphi=90^\circ$, на Восток — угол $\varphi=180^\circ$, на Север — угол $\varphi=270^\circ$.

Ниже на *рисунке 1* приводится соответствующий план города Кызыла с нанесёнными на него осями координат ОХ и ОУ.

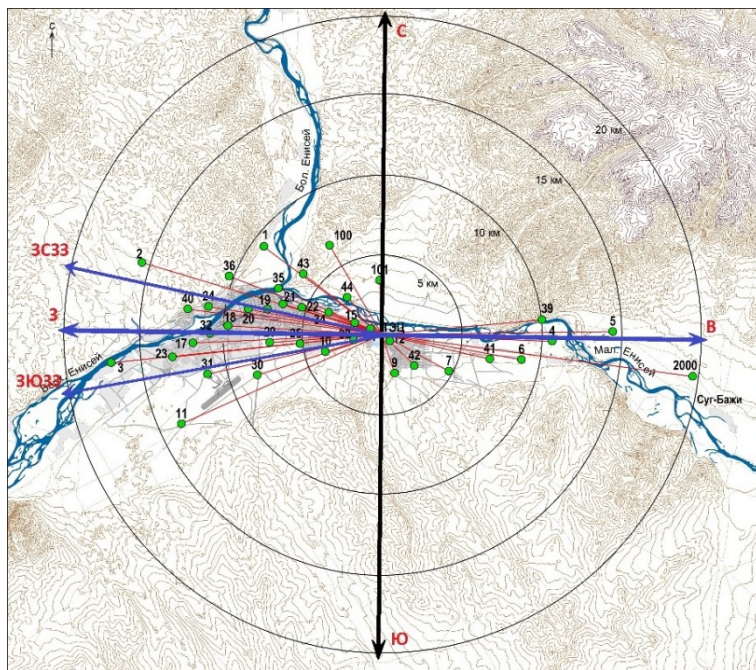


Рисунок 1. Карта города Кызыла с нанесённой на неё системой координат ОХУ с точками отбора проб снега и четырьмя выделенными синим цветом направлениями

Если А — произвольная точка на плане города Кызыла, то она может быть однозначно заданной либо своими декартовыми координатами в системе ОХУ, либо полярными координатами, где задаётся расстояние r от точки А до начала координат О (ТЭЦ), и угол φ соответствующего направления от О до А. При промежуточных расчётах мы используем обе системы координат.

Ранее при решении некоторых задач по данной теме мы использовали также декартову систему координат, но с осью ОХ, лежащей на направлении господствующего ветра над территорией города в отопительный сезон. В настоящей работе такая система координат нам не понадобится.

В работе (Жданок и др., 2015 *a*) были выделены и исследованы две базовые модельные функции распределения концентрации ЗВ в зависимости от расстояния исследуемой точки на поверхности города до трубы ТЭЦ. Одна из этих моделей — экспоненциальная, ранее была разработана нами в (Жданок, 1999; Жданок, 2011). Другая, — нормальная, выведена из общих дифференциальных моделей Г.И. Марчука (Марчук, 1988). Эти функции одномерные, но их можно использовать в различных направлениях по азимуту от центра — трубы ТЭЦ, что даёт эффект двумерной модели, что мы и делаем. В работе (Жданок, 2015) была построена и двумерная модель загрязнения атмосферы г. Кызыла дымом ТЭЦ, однако расчёты по ней весьма объёмны, и мы планируем посвятить этой задаче отдельную статью. Здесь же мы ограничиваемся лишь одномерными функциями. Вначале зададим эти функции.

Обозначим символом x , $x > 0$, расстояние от исследуемой точки до трубы ТЭЦ в километрах. Поскольку наши модели одномерные, то символ x обозначает одновременно и точку, и её расстояние до нуля. Символом C обозначим концентрацию конкретного ЗВ в данной точке в миллиграммах на один литр талой воды в пробе снега. Символами a и b , $a > 0$, $b > 0$, обозначим некоторые физические числовые параметры модели, природа которых нам сейчас не важна.

Первая модель — это функция экспоненциального вида:

$$C = f_1(x) = a \cdot \exp(-b \cdot x) = a \cdot e^{-bx}.$$

Вторая модель — это функция нормального (гауссового) вида:

$$C = f_2(x) = a \cdot \exp(-b \cdot x^2) = a \cdot e^{-bx^2}.$$

Понятно, что параметры a и b , $a > 0$, $b > 0$, в каждой функции свои. При этом параметры a и b будут различными для одного и того же вида функции, если она строится по различным направлениям, задаваемым углом φ к оси ОХ (или азимутом). Таким образом, условно можно считать, что семейство всех функций одного вида при различных φ (т. е. направлениях), a и b является сборной двумерной моделью.

Следующий этап работы — это идентификация модельных функций, т. е. нахождение параметров a , b по различным направлениям на плоскости ОХУ от ТЭЦ. Мы решаем эту задачу при помощи программ специализированного пакета STATISTICA.

Идентификацию параметров отобранных моделей и их графическое сравнение мы производим на базе экспериментальных данных для отопительного сезона 2016–2017 г. Полная база экспериментальных данных содержит информацию о концентрации по 10-ти химическим элементам в 39-ти точках в плане г. Кызыла и его окрестностей. Здесь мы приводим результаты исследований по одному из элементов — ртути (Hg), по четырём выделенным двумерным направлениям, т. е. срезам. Разработанную нами методику отбора точек для идентификации функций f_1 и f_2 мы здесь не приводим (она подробно изложена, напр., в (Жданок и др., 2018 б)).

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МОДЕЛИРОВАНИЯ

2.1. РТУТЬ–В (направление от ТЭЦ на Восток)

На оси ОХ в направлении на Восток из новой экспериментальной базы было выбрано 6 точек на карте г. Кызыла, в которых в марте 2017 г. были взяты пробы снега, по которым замерена концентрация выпавшей из атмосферы на подстилающий снег ртути, выбрасываемой вместе с дымом трубой ТЭЦ. Полученные данные приведены в *таблице 1* и на *рисунке 2*, где x (км) — это расстояние от ТЭЦ в указанном направлении (куда дует ветер), а C (мг/л) — концентрация ртути.

Таблица 1. Экспериментальные данные по шести точкам в заданном направлении на Восток

	№ точек на карте					
	12	41	39	4	5	2000
Расстояние от ТЭЦ, x (км)	0,637	6,953	10,118	10,715	14,528	19,731
Концентрация ртути, C (мг/л)	0,0097	0,0029	0,0047	0,0046	0,0030	0,0027

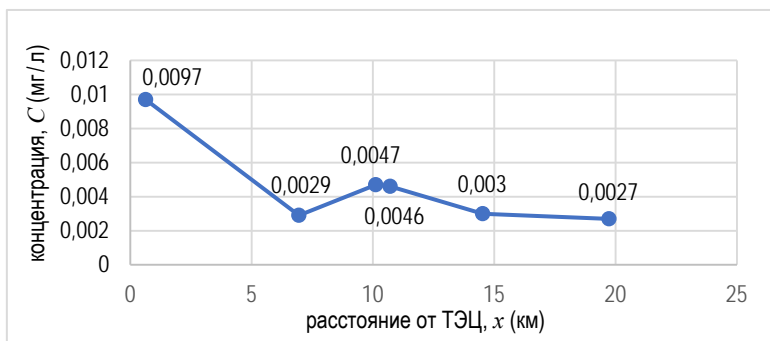


Рисунок 2. Экспериментальная ломаная для ртути по шести точкам, направление от ТЭЦ на Восток

Оценивание неизвестных параметров наших моделей (идентификацию функций) будем производить по имеющимся статистическим данным, используя только 4 точки из 6-ти, отобранные для идентификации функций f_1 и f_2 : точки с номерами 12, 41, 5, 2000 (рис. 3).

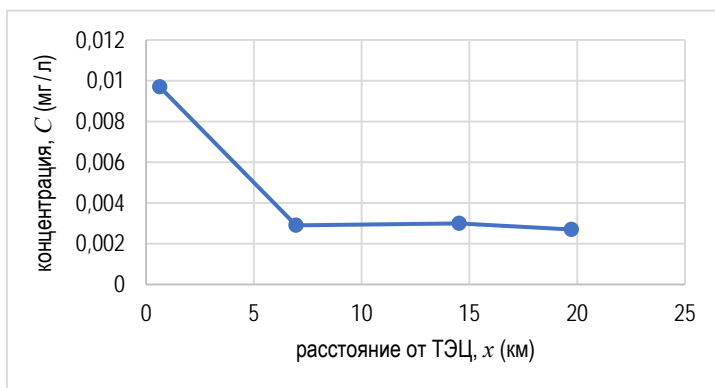


Рисунок 3. Экспериментальная ломаная для ртути по четырём отобранным точкам, направление от ТЭЦ на Восток

Идентификацию параметров a и b наших модельных нелинейных функций мы проводим методом наименьших квадратов (МНК), используя пакет программ STATISTICA. В результате статистического анализа получаем следующие конкретные значения для наших модельных функций:

$$f_1 = 0,0097 \cdot \exp(-0,1003 \cdot x), f_2 = 0,0097 \cdot \exp(-0,0228 \cdot x^2).$$

Покажем на одном сводном графике (рис. 4, x — расстояние от ТЭЦ, км, y — концентрация ртути, мг/л) результаты моделирования — функции f_1 , f_2 и распределение ртути на 6-ти экспериментальных точках $\{(0.637; 0.0097), (6.953; 0.0029), (10.118; 0.0047), (10.715; 0.0046), (14.528; 0.0030), (19.731; 0.0027)\}$.

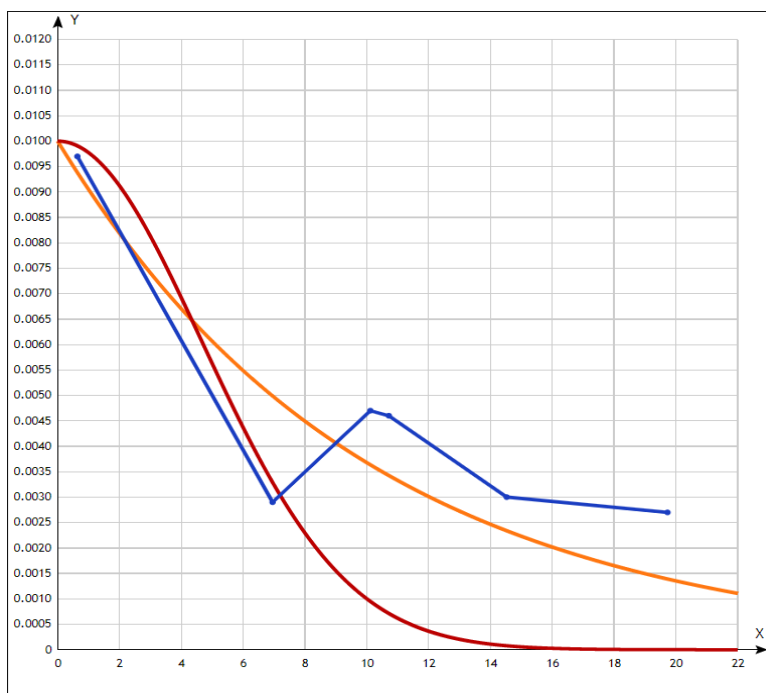


Рисунок 4. Графики идентифицированных функций на фоне экспериментальной ломаной:

■ — $f_1 = 0,0097 \cdot \exp(-0,1003 \cdot x)$;
 ■ — $f_2 = 0,0097 \cdot \exp(-0,0228 \cdot x^2)$;
 ■ — экспериментальная ломаная

Результаты моделирования загрязнения снежного покрова ртутью в других направлениях приводим далее без подробных пояснений.

2.2. РТУТЬ-З (направление от ТЭЦ на Запад)

В направлении на Запад всего отобрано 8 точек взятия проб снега из новой базы данных, указанные в *таблице 2*.

Таблица 2. Экспериментальные данные по восьми точкам в заданном направлении на Запад

	№ точек на карте							
	14	33	25	29	18	32	17	23
Расстояние от ТЭЦ, x (км)	0,815	1,830	5,881	7,087	9,718	10,765	12,367	13,274
Концентрация ЗВ, C (мг/л)	0,0104	0,0079	0,0055	0,0074	0,0101	0,0036	0,0088	0,0084

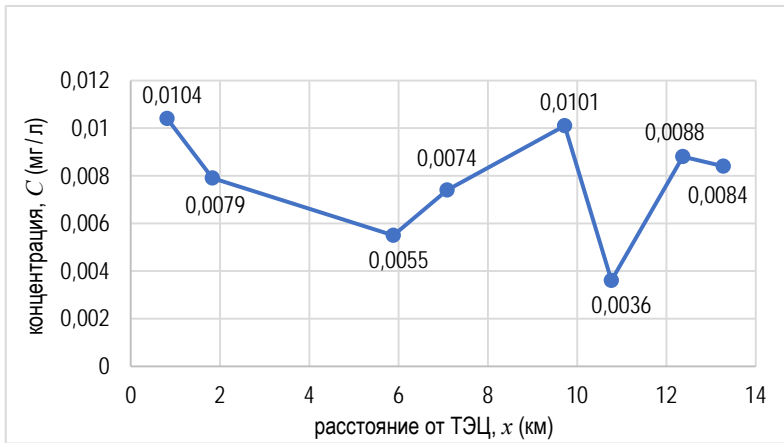


Рисунок 5. Экспериментальная ломаная для ртути по восьми точкам, направление от ТЭЦ на Запад

Для идентификации функций f_1 и f_2 были отобраны 4 точки с номерами 14, 33, 25, 32 (рис. 6).

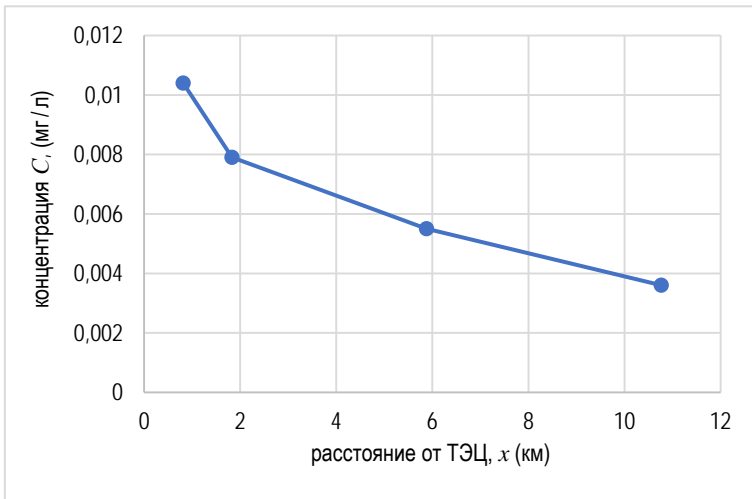


Рисунок 6. Экспериментальная ломаная для ртути по отобранным четырём точкам, направление от ТЭЦ на Запад

В результате идентификации МНК с помощью отобранных точек в программе STATISTICA получаем следующие значения параметров для наших модельных функций:

$$f_1 = 0,0106 \cdot \exp(-0,1088 \cdot x), f_2 = 0,0091 \cdot \exp(-0,0099 \cdot x^2).$$

На рисунке 7 представляем результаты моделирования — функции f_1, f_2 и распределение ртути на восьми экспериментальных точках $\{(0.815; 0.0104), (1.830; 0.0079), (5.881; 0.0055), (7.087; 0.0074), (9.718; 0.0101), (10.765; 0.0036), (12.367; 0.0088), (13.274; 0.0084)\}$.

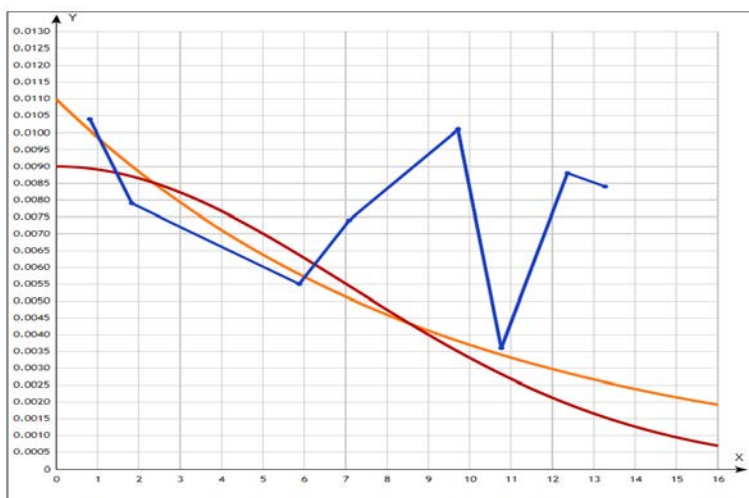


Рисунок 7. Графики идентифицированных функций на фоне экспериментальной ломаной:

■ — $f_1 = 0,0106 \cdot \exp(-0,1088 \cdot x)$;
 ■ — $f_2 = 0,0091 \cdot \exp(-0,0099 \cdot x^2)$;
 ■ — экспериментальная ломаная

2.3. РТУТЬ–ЗЮЗЗ (направление от ТЭЦ на Запад-Юго-Запад-Запад)

В данном направлении было выбрано всего пять точек взятия проб снега, данные по которым приведены в таблице 3.

Таблица 3. Экспериментальные данные по пяти точкам в заданном направлении на Запад-Юго-Запад-Запад

	№ точек на карте				
	14	10	25	30	31
Расстояние от ТЭЦ, x (км)	0,815	3,736	5,881	8,267	11,268
Концентрация ЗВ, C (мг/л)	0,0104	0,0034	0,0055	0,0064	0,0048

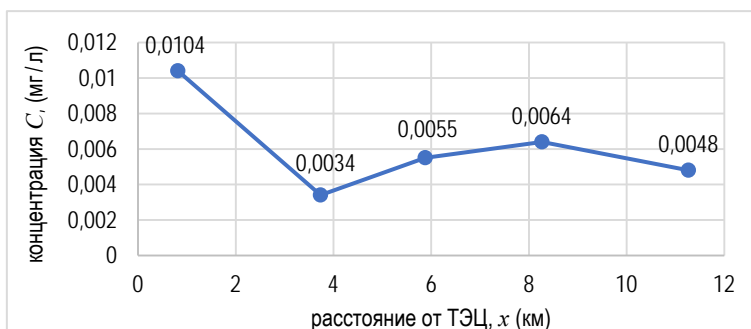


Рисунок 8. Экспериментальная ломаная для ртути по пяти точкам, направление от ТЭЦ на Запад-Юго-Запад-Запад

Экспериментальные точки, отобранные для идентификации функций f_1 и f_2 — точки с номерами 14, 10, 31 (рис. 9).

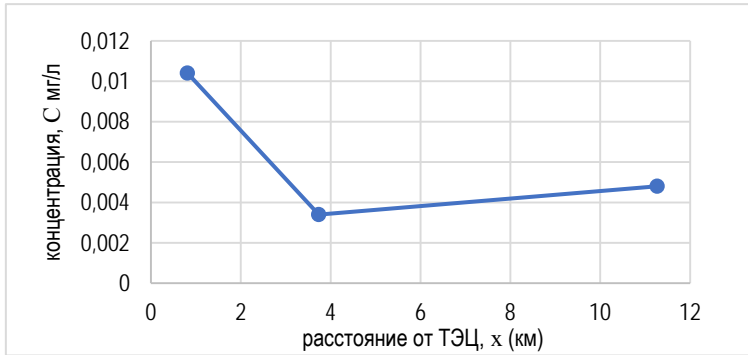


Рисунок 9. Экспериментальная ломаная для ртути по отобранным трём точкам, направление от ТЭЦ на Запад-Юго-Запад-Запад

В программе STATISTICA МНК получаем значения параметров модельных функций:

$$f_1 = 0,0096 \cdot \exp(-0,1057 \cdot x), f_2 = 0,0110 \cdot \exp(-0,0840 \cdot x^2).$$

На рисунке 10 представим результаты моделирования — функции f_1 , f_2 и распределение ртути на пяти экспериментальных точках $\{(0.815; 0.0104), (3.736; 0.0034), (5.881; 0.0055), (8.267; 0.0064), (11.268; 0.0048)\}$.

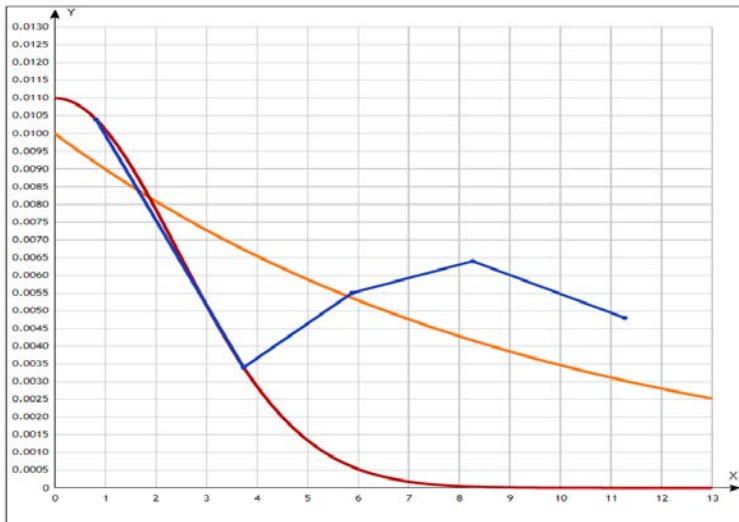


Рисунок 10. Графики идентифицированных функций на фоне экспериментальной ломаной:

■ — $f_1 = 0,0096 \cdot \exp(-0,1057 \cdot x)$;
 ■ — $f_2 = 0,0110 \cdot \exp(-0,0840 \cdot x^2)$;
 ■ — экспериментальная ломаная

2.4. РТУТЬ–ЗСЗЗ (направление от ТЭЦ на Запад-Северо-Запад-Запад)

В направлении на Запад-Северо-Запад-Запад выбрано всего восемь точек, указанные в таблице 4.

Таблица 4. Экспериментальные данные по восьми точкам в заданном направлении на Запад-Северо-Запад-Запад

	№ точек на карте							
	14	15	34	22	19	20	24	40
Расстояние от ТЭЦ, x (км)	0,815	1,865	3,628	5,326	7,396	8,564	11,076	12,337
Концентрация ЗВ, C (мг/л)	0,0104	0,0037	0,0080	0,0025	0,0086	0,0047	0,0074	0,0028

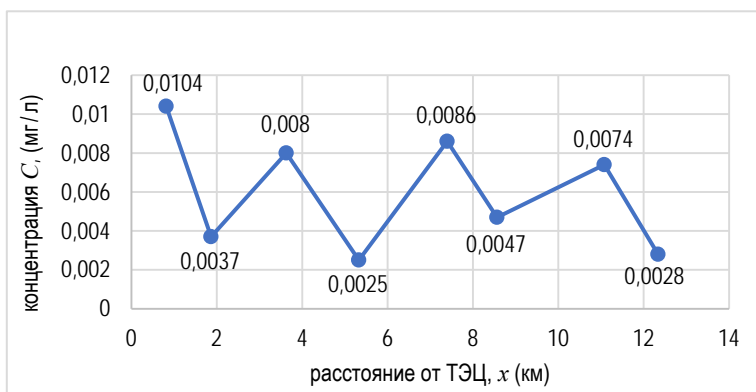


Рисунок 11. Экспериментальная ломаная для ртути по восьми точкам, направление от ТЭЦ на Запад-Северо-Запад-Запад

Экспериментальные точки, отобранные для идентификации функций f_1 и f_2 — точки с номерами 14, 15, 22, 40 (рисунок 12).

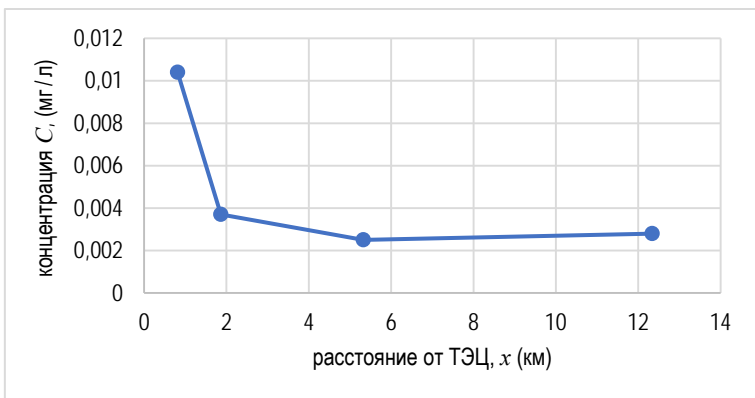


Рисунок 12. Экспериментальная ломаная для ртути по отобранным четырём точкам, направление от ТЭЦ на Запад-Северо-Запад-Запад

Получаем методом наименьших квадратов, реализованном в программе STATISTICA следующие значения для наших модельных функций:

$$f_1 = 0,0061 \cdot \exp(-0,0804 \cdot x), f_2 = 0,0133 \cdot \exp(-0,3670 \cdot x^2).$$

Покажем на одном сводном графике (рисунок 13, на которых x — расстояние от ТЭЦ, км, y — концентрация ртути, мг/л) функции f_1 , f_2 и распределение ртути на

отобранных экспериментальных точек $\{(0.815; 0.0104), (1.865; 0.0037), (5.326; 0.0025), (12.337; 0.0028)\}$.

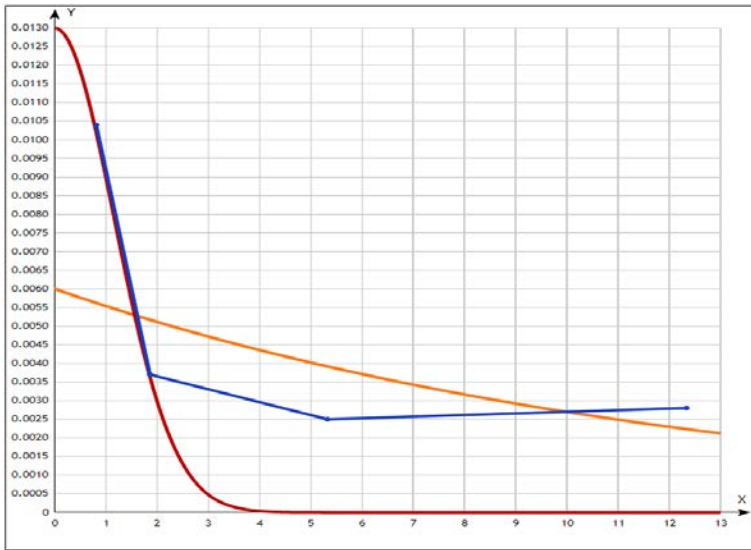


Рисунок 13. Графики идентифицированных функций на фоне экспериментальной ломаной:

■ — $f_1 = 0,0061 \cdot \exp(-0,0804 \cdot x)$;
 ■ — $f_2 = 0,0133 \cdot \exp(-0,3670 \cdot x^2)$;
■ — экспериментальная ломаная

3. ПРОГНОЗНЫЕ РАСЧЁТЫ КОНЦЕНТРАЦИИ ЗВ В НОВЫХ ТОЧКАХ

Построенные математические модельные функции распределения ЗВ имеют очень важное практическое значение. Поясним это.

Количество взятых проб снега всегда относительно небольшое, охватывает весьма ограниченную территорию города, а желательно знать уровень загрязненности и во многих других местах. Вот для этого мы и можем воспользоваться модельными функциями распределения ЗВ. Они позволяют теоретически вычислить ожидаемый уровень загрязнённости снега осадками из дыма ТЭЦ, и, косвенно, и воздуха, в любой точке в соответствующем направлении, т. е. получить прогнозное значение концентрации ЗВ в такой точке.

Для примера возьмём точку, находящуюся на расстоянии $x=15$ км от ТЭЦ по направлению на Запад. Вычислим для неё прогнозную концентрацию ртути по уже идентифицированной нами в п. 2.2. экспоненциальной модельной функции $f_1 = 0,0106 \cdot \exp(-0,1088 \cdot x)$. Получим значение концентрации ртути $C = f_1(15) = 0,0106 \cdot \exp(-0,1088 \cdot 15) = 0,0021$ мг/л, и задача прогнозирования для точки $x=15$ км решена.

Модельные функции необходимы и для решения другой важной задачи — оценки доли ЗВ из других физических источников, кроме трубы ТЭЦ, в общем загрязнении поверхности снега, а значит и воздуха. Продемонстрируем решение такой задачи на следующем примере. В направлении от ТЭЦ на Запад возьмём точку, в которой уже была взята и химически исследована проба снега, которая в протоколе эксперимента значится под номером 18, представленная в таблице 3 и на рисунке 5. Эта точка расположена на расстоянии 9,718 км от ТЭЦ в указанном направлении. Подставляем соответствующее значение $x=9,718$ в идентифицированные модельные

функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, и по приведённым формулам для них вычисляем ожидаемые значения концентрации ртути C_1 и C_2 в данной точке:

$$C_1 = f_1(9,718) = 0,0106 \cdot \exp(-0,1088 \cdot 9,718) = 0,0037 \text{ мг/л}$$

$$C_2 = f_2(9,718) = 0,0091 \cdot \exp(-0,0099 \cdot 9,718) = 0,0036 \text{ мг/л.}$$

Итак, значения C_1 и C_2 в рассматриваемой точке практически не отличаются друг от друга, что хорошо видно и на *рисунке 7* для точки на оси ОУ с абсциссой $x=9,718$ (точка сбора снега под номером 18). Оставим для конкретности значение C_1 $f_1(9,718)=0,0037$ мг/л. По *таблице 3* мы видим, что фактическое экспериментальное значение концентрации ртути C в этой точке равно $0,0101$ мг/л, что больше теоретического расчётного значения на величину

$$\Delta = C - C_1 = 0,0101 - 0,0036 = 0,0065 \text{ мг/л.}$$

Следовательно, в окрестности точки взятия пробы под №18 имеются другие источники загрязняющих веществ. Их доля в общем загрязнении ртутью рассчитывается как отношение $\Delta/C_1=0,0065/0,0101=0,64$, т.е. 64 % загрязнения ртутью в исследуемой точке приходится не на ТЭЦ, а на другие источники ЗВ, эта доля в 1,8 раз больше расчётной доли ЗВ (ртути) из трубы ТЭЦ.

Общий вывод — количество ртути на снежном покрове (и в атмосфере), выбрасываемой в окрестности точки города Кызыла под №18 другими источниками загрязнения почти в два раза превышает количество ртути, поступающей из трубы ТЭЦ.

Выяснение сложного вопроса о том, какие это могут быть источники, выходит за пределы исследуемых задач в данной статье, и мы его здесь подробно не обсуждаем. Укажем лишь на тот хорошо известный факт, что мощными источниками ЗВ на территории города Кызыла, кроме ТЭЦ, являются отопительные печи домов частного сектора и небольшие котельные предприятий.

Расчёты, аналогичные представленным в данном сообщении, были нами проведены и по остальным ЗВ (тяжёлые металлы), здесь мы их не приводим из-за ограниченности объёма статьи.

ЛИТЕРАТУРА

- Жданок А.И. Математическая модель загрязнения атмосферы г. Кызыла источниками дыма // 55 лет в составе России: Тез. докл. Респ. науч.-практ. конф. – Кызыл: ТувГУ, 1999. – С. 84–88.
- Жданок А.И. Дифференциальная модель загрязнения экосферы г. Кызыла дымом ТЭЦ // Науч. тр. ТувГУ. Вып. IX. – Кызыл: ТувГУ, 2011. – С. 72–75.
- Жданок А.И., Лешаков О.Э., Ивирсина Н.Б., Хурума А.К. Сравнительный анализ двух математических моделей распределения загрязняющих веществ дымом Кызыльской ТЭЦ // Вестн. ТувГУ. Вып. 3: Техн. и физ.-мат. науки. – Кызыл: ТувГУ, 2015 а. – С. 111–121.
- Жданок А.И., Лешаков О.Э., Ивирсина Н.Б., Хурума А.К. Два типа математических моделей распространения загрязняющих веществ дымом Кызыльской ТЭЦ // Региональная экономика: технологии, экономика, экология и инфраструктура: Сб. материалов Междунар. науч.-практ. конф. (14.10.2015, Кызыл) / Отв. ред. докт. экон. наук Г.Ф. Балакина. – Кызыл: ТуВИКОПР СО РАН, 2015 б. – С. 172–178.
- Жданок А.И. Двумерная модель загрязнения атмосферы Кызыла дымам ТЭЦ // Региональная экономика: технологии, экономика, экология и инфраструктура: Сб. материалов Междунар. науч.-практ. конф. (14.10.2015, Кызыл) / Отв. ред. докт. экон. наук Г.Ф. Балакина. – Кызыл: ТуВИКОПР СО РАН, 2015. – С. 179–185.
- Жданок А.И., Ивирсина Н.Б., Хурума А.К. Идентификация функций распределения опадающих загрязняющих веществ в дыме Кызыльской ТЭЦ по новой базе экспериментальных данных 2016 года на примере свинца // Науч. тр. ТувГУ. Вып. XIII. – Кызыл: ТувГУ, 2016. – С. 169–171.
- Жданок А.И., Ивирсина Н.Б., Хурума А.К. Функции распределения оседающих загрязняющих веществ из дыма Кызыльской ТЭЦ, идентифицированных по базе экспериментальных дан-

- ных 2016 года на примере железа // Информатизация образования: история, проблемы и перспективы: Сб. материалов Всерос. науч.-практ. конф., посвящ. 70-летию со дня рождения первого ректора ТувГУ О.Б. Бузур-оола. – Кызыл: ТувГУ, 2017 а. – С. 63–67.
- Жданок А.И., Лешаков О.Э., Ивирсина Н.Б., Хурума А.К.* Двумерные модели распространения загрязняющих веществ дымом Кызылской ТЭЦ и их идентификация на примере кадмия // Науч. тр. ТувГУ. Вып. XIV: Материалы ежег. науч.-практ. конф. преподавателей, сотрудников и аспирантов ТувГУ, посвящ. году экологии в Российской Федерации и году молодёжных инициатив в Туве (21.10.2017, Кызыл). – Кызыл: ТувГУ, 2017 б. – С. 58–62.
- Жданок А.И., Лешаков О.Э., Ивирсина Н.Б., Хурума А.К.* Идентификация двумерных моделей распространения загрязняющих веществ дымом Кызылской ТЭЦ на примере марганца // Региональная экономика: технологии, экономика, экология и инфраструктура: Материалы 2-ой Междунар. науч.-практ. конф. (18–20.10.2017, Кызыл, Россия). – Кызыл: Туви-КОПР СО РАН, 2017 в. – С. 233–242.
- Жданок А.И., Ивирсина Н.Б., Хурума А.К.* Математическое моделирование загрязнения экосферы города Кызыла дымом ТЭЦ и его количественные характеристики на примере загрязняющего элемента медь (Cu) // Инновации и инвестиции. – 2018 а. – № 1. – С. 211–218.
- Жданок А.И., Ивирсина Н.Б., Хурума А.К., Аюнова О.Д.* Изоклины двумерной модели загрязнения атмосферы г. Кызыла дымом ТЭЦ и прогнозные пространственные расчёты // Инновации и инвестиции. – 2018 б. – № 2. – С. 206–211.
- Марчук Г.И.* Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. – М.: Наука, 1988. – 320 с.