

# РАЗДЕЛ IV. МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ [MATHEMATICS. MATHEMATICAL MODELING]

УДК 519.87

Б.С. МОНГУШ

*Тувинский институт комплексного освоения природных ресурсов СО РАН (Кызыл, Россия)*

## НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ПЛАНА ПРОИЗВОДСТВА

В работе уточнено определение термина «ассортимент товара» и предложена математическая модель оптимизации плана производства предприятия, которая учитывает нелинейный характер зависимости цены товара от объёма производства. Проведена апробация на данных предприятия ООО «Кызылское учебно-производственное предприятие Всероссийского общества слепых» (ООО «Кызылское УПП ВОС»).

*Ключевые слова:* модель планирования производства, ассортимент товара, прибыль, нелинейное программирование.

Рис. 1. Табл. 4. Библ. 6 назв. С. 50–55.

B.S. MONGUSH

*Tuvinian Institute for Exploration of Natural Resources of SB RAS (Kyzyl, Russia)*

### NON-LINEAR OPTIMIZATION TASK OF THE PRODUCTION PLAN

The present work clarifies the definition of the term «product mix» and suggests a mathematical model for optimizing the production plan of the companies that considers the non-linear nature of the price dependence of goods on the production volume. The work approbation is carried out based on the data of «Kyzylskaya UPP VOS» company.

*Keywords:* production planning model, product mix, profit, non-linear programming.

Figure 1. Tables 4. References 6. P. 50–55.

Ассортимент производимой продукции — один из важнейших факторов, определяющих размер прибыли, получаемой предприятием. Ассортимент влияет на такие качественные и количественные показатели деятельности предприятия как рентабельность производства, доля рынка, конкурентоспособность и т. д.

Сегодня существуют различные определения товарного ассортимента, что, прежде всего, связано с тем, что большинство используемых терминов пришло к нам из англоязычной литературы. Более того в переводных изданиях одного и того же автора разные переводчики дают разный перевод терминов. Так, в переводном издании Котлер Ф., Армстронг Г., Сондерс Д., Вонг В. «Основы маркетинга» понятие товарного ассортимента соответствует английскому словосочетанию «product line» и характеризуется как «группа товаров, тесно связанных между собой либо в силу схожести их функционирования, либо в силу того, что их продают одним и тем же группам клиентов, или через одни и те же типы торговых заведений, или в рамках одного и того же диапазона цен» (Котлер и др., 2008). В переводе другой монографии этого же автора «товарный ассортимент — это совокупность всех товаров и товарных единиц, пред-

лагаемых конкретным продавцом» и соответствует английскому термину «product mix» (Котлер, 1992). Г.Л. Багиев (Багиев, Тарасевич, 2012) с соавторами, также придерживаются мнения о соответствии термина «ассортимент продукции компании» термину «product mix» и определяет его как совокупность продуктовых линий и отдельных продуктовых предложений компании».

Попытка сопоставить русскую и зарубежную терминологию была предпринята В.В. Зотовым (Зотов, 2006). В русском языке ассортиментом принято называть товары, относящиеся как к одной, так и к разным товарным группам. В английском языке assortment (ассортимент) означает принадлежность товаров к одной товарной группе, а термин «product mix» — к разным.

Нам представляется, что сегодня под понятием «ассортимент товара» (АТ) (что соответствует английскому термину «product mix») наиболее целесообразно подразумевать группу схожих товаров одного функционального назначения. Ассортимент товара делится на ассортиментные (товарные) группы (АГ) (range of goods). Ассортиментная группа — это группа товаров одного функционального назначения, ориентированная на определённый сегмент рынка. Ассортиментные группы в свою очередь представлены товарными или продуктовыми линиями (ТЛ) (product-line), которые представляют из себя группу товаров тесно связанных между собой в силу аналогичных принципов функционирования, предназначенных одним и тем же клиентам, реализуемых через одни и те же типы торговых заведений и того же диапазона цен. Каждая товарная линия состоит из ассортиментных (продуктовых) позиций (АП) — разновидности и марки продукции. Термин продуктовая позиция или товарная единица соотносится с английским термином stock keeping unit, SKU. Это минимальная величина, на которую можно разделить товарную массу без потери присущих ей свойств. Схематически ассортимент продукции, выпускаемой предприятием, представлен на *рисунке 1*.

Существуют различные методы, используемые при формировании товарного ассортимента, рассматриваемые разными авторами, например, Ф. Котлер, Е. Дихтль и Х. Хёршген (Дихтль, Хёршген, 1995), а также матрицы предложенные сотрудниками компании «Маркон» (Котлер и др., 2008; Котлер, 1992; Дихтль, Хёршген, 1995). В настоящее время наиболее часто для формирования структуры ассортимента используются следующие методы:

- метод ранжирования ассортимента продукции на основе матрицы Бостонской консалтинговой группы (БКГ);
- метод операционного и финансового рычага;
- метод линейного программирования.

На основании проведённого анализа, можно сделать следующие выводы:

- большинство методов применимо к формированию ассортиментных групп и имеется только по одному методу для товарной линии и товарного ассортимента;
- в гораздо меньшей степени разработана методология формирования ассортиментной политики в области новых разработок;
- практически все методы учитывают экономические показатели предприятия и менее 50 % — фактор спроса.

Проведённый анализ методов формирования ассортиментной политики показывает, что все они в известной мере являются эвристическими и не лишены недостатков. В математической литературе задача планирования производства традиционно



Рисунок 1. Схема ассортимента продукции, выпускаемой предприятием

рассматривается как задача линейного программирования, для решения которой используется широко известный «симплекс–метод» и соответствующие программы для ЭВМ. С математической точки зрения такая постановка задачи не вызывает вопросов. Но с точки зрения экономики она не может быть признана адекватной, по крайней мере, по двум причинам. Во-первых, этот подход подразумевает, что прибыль зависит исключительно от внутренних ресурсов предприятия, а не от ситуации на рынке. Во-вторых, экономисту хорошо известно, что цена, себестоимость, а, следовательно, и величина прибыли с единицы продукции изменяются с изменением объёма производства.

Формализуем задачу составления плана производства. Предположим, что фирма может произвести  $n$  типов изделий. Определим объём производства каждого типа изделия  $q_i$ , исходя из максимизации общей прибыли

$$\Pi_i = \sum_{i=1}^n \Pi_i \rightarrow \max, \quad (1)$$

где  $\Pi_i$  — прибыль от  $i$ -го типа изделия.

При этом  $\Pi_i = (P_i - ATC_i) \times q_i$ , где  $P_i$  — цена товара;  $ATC_i$  — его себестоимость.

Из экономической теории известно, что как себестоимость продукции, так и её цена зависят от объёма производства (эффект масштаба производства и закон спроса соответственно), т. е.  $P_i = f(q_i)$ ,  $ATC_i = \varphi(q_i)$ . Тогда

$\Pi_i = (f(q_i) - \varphi(q_i))q_i = G(q_i)$  и условие оптимизации  $q_i$  имеет вид

$$\frac{d\Pi_i}{dq_i} = 0 \quad (2)$$

В реальной ситуации вполне может оказаться, что найденный оптимальный объём производства  $q_i$  для малой фирмы с ограниченными производственными возможностями просто недостижим. Предположим, что фирма имеет ограниченную производственную базу, которую она в краткосрочном периоде не в состоянии расширить. Критерий оптимизации остаётся тем же:  $\Pi_i = \sum_{i=1}^n \Pi_i \rightarrow \max$ , однако добавляется ряд ограничений. Прежде всего, это ограничения по возможности использования оборудования:

$$\sum_{i=1}^n \mu_{ki} q_i \leq T_k, \quad k = 1, \dots, K, \quad (3)$$

где  $\mu_{ki}$  — время, затрачиваемое  $k$ -м типом оборудования на обработку единицы  $i$ -го продукта;  $T_k$  — общий ресурс времени  $k$ -го оборудования;  $K$  — количество разных типов оборудования.

Могут быть и другие ограничения, однако в любом варианте имеется задача с нелинейным критерием, который следует максимизировать, и линейными или нелинейными ограничениями, т. е. задача нелинейного программирования (Богданов, Монгуш, 2017).

Математическая модель апробирована на данных предприятия ООО «Кызылское УПП ВОС».

Для построения зависимости прибыли от объёма производства изделий определена зависимость цены и себестоимости от объёмов производства:  $P_i = f(q_i)$  и  $ATC_i = \varphi(q_i)$  для каждого конкретного товара.

При построении зависимости  $P_i = f(q_i)$  считалось, что на малом участке изменения цены зависимость объёма продаж продукции от цены (кривая спроса) носит линейный характер:

$$q^d = kp + b$$

Оценки коэффициентов  $k$  и  $b$  получены на основании данных об объёмах спроса и ценах на продукцию за 2015 и 2016 гг. (табл. 1), имеющихся у ООО «Кызылское УПП ВОС», следующим образом:

$$k = \frac{\Delta q^d}{\Delta p} = \frac{q_1 - q_0}{p_1 - p_0}; \quad b = q_0^d - k \times p_0.$$

Таблица 1. Оценка коэффициентов  $k$  и  $b$  на основании объёма спроса и цены на продукцию за 2015 и 2016 гг. Кызылского УПП ВОС

Наименование изделия	Объём спроса		Цена, р.		Коэффициенты	
	2016	2015	2016	2015		
	$q_1$	$q_0$	$p_1$	$p_0$	$k$	$b$
Матрасы ватные, шт.	4167	4926	2690	2454	-3,2161	12818,31
Одеяла ватные, шт.	2637	2591	1550	1415	0,340741	2108,852
Постельное бельё, шт.	13903	16469	804	777	-95,037	90312,78
Рукавицы рабочие, пар	161	635	252	202	-9,48	2549,96
Спецодежда, шт.	964	826	1895	1626	0,513011	-8,15613
Подушки, шт.	479	472	353	369	-0,4375	633,4375
Нижнее бельё, шт.	85	550	1101	562	-0,86271	1034,842
Бельё для новорождённых, шт.	901	743	130	125	31,6	-3207

Например, для изделия матрасы ватные  $k = \frac{4167 - 4926}{2690 - 2454} = -3,216$ ,

$b = 4926 + 3,216 \times 2454 = 12818,31$  и, следовательно,  $q_d = -0,311q + 3985,67$ .

Из последней формулы выразим  $p$  через  $q$ :  $p = -0,311q + 3985,67$ .

Анализируя статьи затрат плановой калькуляции изделия, можно определить средние переменные издержки (AVC) и средние постоянные издержки (AFC) (табл. 2):

Однако на практике мы сталкиваемся с ограничениями объёма выпуска продукции, связанными с ограниченными производственными возможностями. ООО «Кызылское УПП ВОС» является предприятием Всероссийского общества слепых, следовательно, основными рабочими являются инвалиды по зрению. Исходя из физических возможностей технологических рабочих, существуют ограничения на объём выпуска изделий, которые могут быть записаны

в виде:  $\sum_{i=1}^8 q_i \leq 3500$ .

Таблица 2. Средние переменные и средние постоянные издержки Кызылского УПП ВОС

Наименование изделия	Издержки		
	средние переменные	средние постоянные	постоянные
	AVC	AFC	FC
Матрасы ватные, шт.	773,77	610	3004860
Одеяла ватные, шт.	651,45	495	1282545
Постельное бельё, шт.	146,95	111	1828059
Рукавицы рабочие, пар	54,28	42	26670
Спецодежда, шт.	652,11	523	431998
Подушки, шт.	212,72	188	88736
Нижнее бельё, шт.	320,69	246	135300
Бельё для новорожд., шт.	68,99	54	40122

$q_1 \leq 6000$ ;  $q_2 \leq 3400$ ;  $q_3 \leq 18000$ ;  $q_4 \leq 2000$ ;  $q_5 \leq 1200$ ;  $q_6 \leq 1100$ ;  $q_7 \leq 600$ ;  $q_8 \leq 1500$ ,  
где  $q_i$  — объём выпуска  $i$ -ой продукции.

Целевая функция задачи оптимизации имеет вид:  $f(x) = 3191,898 q_1^2 - 0,31094 q_1 + 2,9348 q_2^2 - 6840,472 q_2 - 0,010522 q_3^2 + 803,3403 q_3 - 0,10549 q_4^2 + 214,7031 q_4 + 1,9493 q_5^2 - 636,2114 q_5 - 2,2857 q_6^2 + 1234,8371 q_6 - 1,1591 q_7^2 + 878,8369 q_7 + 0,03165 q_8^2 + 32,4973 q_8 \rightarrow \max$

Решение задачи на ЭВМ в среде MATLAB дало следующие результаты (табл. 3):

Таблица 3. Результаты оптимизации объёмов производства с учётом ограничений Кызылского УПП ВОС

Наименование изделия	Оптимальный объём производства, шт. ( $q^*$ )	$q_0$
Матрасы ватные, шт.	5132	4926
Одеяла ватные, шт.	3400	2591
Постельное бельё, шт.	18000	16469
Рукавицы рабочие, пар	1017	635
Спецодежда, шт.	1200	826
Подушки шт.	270	472
Нижнее бельё, шт.	379	550
Бельё для новорожд., шт.	1500	743

Алгоритм построен по методу подпространства доверительной области (subspace trust-region method), где на каждой итерации решается подзадача минимизации на выделенном подпространстве  $S$ , в результате чего находится очередной шаг к строго допустимому решению задачи. Решение этой системы находится методом предобусловленных сопряжённых градиентов (PCG).

Таким образом, с учётом спроса на продукцию и физических возможностей рабочих предприятия решена задача поиска оптимального плана производства.

В результате оптимизации общая прибыль предприятия увеличилась на 11,1 % — 3682841 р. (табл. 4):

Таблица 4. Результаты оптимизации Кызылского УПП ВОС

Наименование изделия	Прибыль после оптимизации, р.	Прибыль, р.
Матрасы ватные, шт.	13 805 080	13 250 940
Одеяла ватные, шт.	5 270 000	4 016 050
Постельное бельё, шт.	14 472 000	13 241 076
Рукавицы рабочие, пар	256 284	160 020
Спецодежда, шт.	2 274 000	1 565 270
Подушки шт.	95 310	166 616
Нижнее бельё, шт.	417 279	605 550
Бельё для новорожд., шт.	195 000	96 590
$\Sigma$	36 784 953	33 102 112

## ЛИТЕРАТУРА

- Котлер Ф., Армстронг Г., Сондерс Д., Вонг В. Основы маркетинга: Пер. с англ. 5 европ. изд. — М.: Вильямс, 2013. — 752 с.
- Котлер Ф. Основы маркетинга: Пер. с англ. В.Б. Боброва. — Новосибирск: Наука, Сиб. изд. фирма РАН, 1992. — 736 с.
- Багиев Г.Л., Тарасевич В.М. Маркетинг: Учеб. пособие для вузов. — СПб.: Питер, 2012. — 560 с.
- Зотов В.В. Ассортиментная политика фирмы: Учеб.-практ. пособие. — М.: Эксмо, 2006. — 240 с.
- Дихтль Е., Хёриген Х. Практический маркетинг: Учеб. пособие / Пер. с нем. А.М. Макарова. — М.: Высш. шк., 1995. — 55 с.

*Богданов А.И., Монгуш Б.С.* Математическая модель оптимального плана производства // Региональная экономика: технологии, экономика, экология и инфраструктура: Материалы II Междунар. науч.-практ. конф. (18–20.10.2017, Кызыл) / Отв. ред. докт. экон. наук Г.Ф. Балакина. – Кызыл: ТувИКОПР СО РАН, 2017. – С. 230–232.