РАЗДЕЛ V. МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ [MATHEMATICS. MATHEMATICAL MODELING]

УДК 514.7, 514.82

М.П. КРАСИЛЬНИКОВ

Тувинский институт комплексного освоения природных ресурсов СО РАН (Кызыл, Россия)

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ДВУХ ЛЕВОИНВАРИАНТНЫХ ЛОРЕНЦЕВЫХ МЕТРИК НА ГРУППЕ Ли, АЛГЕБРА Ли КОТОРОЙ ЗАДАНА КОММУТАЦИОННЫМИ СООТНОШЕНИЯМИ $[e_4, e_1] + e_1$; $[e_4, e_2] = e_1 + e_2$; $[e_4, e_3] = e_3$

Настоящая работа посвящена интегрированию ранее найденных автором дифференциальных уравнений геодезических линий двух левоинвариантных лоренцевых метрик на четырёхмерной разрешимой группе Ли, алгебра Ли которой задаётся коммутационными соотношениями $[e_4, e_1] + e_1$; $[e_4, e_2] = e_1 + e_2$; $[e_4, e_3] = e_3$. Уравнения геодезических линий исследуемых пространств найдены в явном виде. Исходя из вида найденных уравнений получено ещё одно доказательство геодезической неполноты исследуемых пространств, т. е. наличия в них сингулярностей.

Ключевые слова: геодезическая линия, левоинвариантная лоренцева метрика, группа Ли, геодезическая полнота.

Библ. 5 назв. С. 66–69.

M.P. KRASILNIKOV

Tuvinian Institute for Exploration of Natural Resources of SB RAS (Kyzyl, Russia)

GEODESIC LINES OF TWO LEFT-INVARIANT LORENTZIAN METRICS ON A Lie GROUP, WHERE Lie ALGEBRA WITH COMMUTATION FORMULA IMAGE.PNG $[e_4, e_1] + e_1$; $[e_4, e_2] = e_1 + e_2$; $[e_4, e_3] = e_3$

This paper is devoted to the integration of the differential equations of geodesic lines of two left-invariant Lorentzian metrics on a four-dimensional solvable Lie group previously found by the author, where Lie algebra works out with commutation formula $[e_4, e_1] + e_1$; $[e_4, e_2] = e_1 + e_2$; $[e_4, e_3] = e_3$. The equations of the geodesic lines of the mentioned group are found in an explicit form. Another fact of the geodesic incompleteness of the studied group, i.e. availability of singularities is obtained based on the found equation.

Keywords: geodesic line, left-invariant Lorentz metric, Lie group, geodesic completeness.

References 5. P. 66–69.

Задание в алгебре Ли, отождествляемой с касательным пространством к соответствующей группы Ли в единице, метрики лоренцевой сигнатуры и разнесение этой метрики по всей группе Ли левыми сдвигами, превращает группу Ли в дифференцируемое лоренцево многообразие или пространство-время.

Ранее в работе (Красильников, 1988) были найдены дифференциальные уравнения геодезических всех (по классификации (Астраков и др., 1988)) левоинвариантных лоренцевых метрик на группе Ли, алгебра Ли которой задаётся коммутационными соотношениями $[e_4, e_1] + e_1$; $[e_4, e_2] = e_1 + e_2$; $[e_4, e_3] = e_3$. В настоящей работе мы приводим явный вид двух из них. Так как геодезические это траектории движения материальных точек, знание их явного вида представляет большой интерес не только для исследования причинной структуры пространства-времени, но характера сингулярностей в случае его геодезической неполноты (Левичев, 1990).

Обозначим через V_1 , V_2 , V_3 идеалы, натянутые на e_1 ; e_1 , e_2 ; e_1 , e_2 , e_3 — соответственно. Эти обозначения приводятся здесь потому, что в работе (Астраков и др., 1988) метрики классифицировались именно по расположению данных идеалов относительно светового конуса. Нам удалось найти уравнения геодезических в явном виде для случаев 5 а и 5 б по этой классификации.

Случай 5 а. Идеалы V_1 , V_2 , V_3 изотропны. Канонический вид метрики в единице группы:

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, p > 0,$$

дифференциальные уравнения геодезических:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{a_4}{p} x_4^2 e^{2x_4} + a_2 x_4 e^{2x_4} - \left(p a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4\left(x_1 + x_2\right) - a_1\right) e^{x_4} \\ \dot{x}_2 = \dfrac{a_4}{p} x_4 e^{2x_4} + a_2 e^{2x_4} \\ \dot{x}_3 = a_3 e^{2x_4} \\ \dot{x}_4 = a_4 e^{x_4}, \end{cases}$$

где a_1, a_2, a_3, a_4 — компоненты начального касательного вектора геодезической.

Общее решение для x_4 имеет вид: $x_4 = \ln\left(-\dfrac{1}{a_4\left(t + C_4\right)}\right)$.

Поскольку изучаемые пространства однородны достаточно найти уравнения геодезических, проходящих через единицу групп. Таким образом, получаем $C_4 = -\dfrac{1}{a_4}$ или $x_4 = -\ln\left(1 - a_4 t\right)$. Подставляя x_4 в дифференциальное уравнение для x_3 находим, что $x_3 = \dfrac{a_3}{a_4\left(1 - a_4 t\right)} - \dfrac{a_3}{a_4}$. Аналогично находим x_2 и x_1. В итоге получаем явный вид уравнений геодезических, проходящих через единицу группы:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a_1}{a_4} + \dfrac{pa_2^2 + a_3^2}{a_4^2} \cdot \dfrac{1 - 2a_4 t}{2(1 - a_4 t)} + \dfrac{\ln(1 - a_4 t)^2}{p(1 - a_4 t)} - \dfrac{1}{p} + \left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{a_1}{a_4} - \dfrac{pa_2^2 + a_3^2}{2a_4^2}\right)(1 - a_4 t) \\ x_2 = \dfrac{1}{1 - a_4 t}\left(\dfrac{a_2}{a_4} - \dfrac{\ln(1 - a_4 t)}{p} - \dfrac{1}{p}\right) + \dfrac{1}{p} - \dfrac{a_2}{a_4} \\ x_3 = \dfrac{a_3}{a_4(1 - a_4 t)} - \dfrac{a_3}{a_4} \\ x_4 = -\ln(1 - a_4 t). \end{cases}$$

Случай 5 б. Идеалы, V_3 , V_2 изотропны, а идеал V_1 пространственноподобен, канонический вид метрики в единице группы:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, p > 0,$$

дифференциальные уравнения геодезических:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{a_1}{p} x_4^2 e^{2x_4} + a_2 x_4 e^{2x_4} + a_1 e^{2x_4} \\ \dot{x}_2 = \dfrac{a_1}{p} x_4 e^{2x_4} + a_2 e^{2x_4} \\ \dot{x}_3 = (a_1(-x_1 - x_2) - pa_2 x_2 - a_4 x_3 + a_3)e^{x_4} \\ \dot{x}_4 = a_4 e^{x_4}. \end{cases}$$

Общее решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = \int \left(\dfrac{a_1}{p} x_4^2 + a_2 x_4 + a_1\right) e^{2x_4} dt + C_1 \\ x_2 = \int \left(\dfrac{a_1}{p} x_4 + a_2\right) e^{2x_4} dt + C_2 \\ x_3 = \int (-a_1 x_1 - a_1 x_2 - a_2 p x_2 + a_3) e^{a_4 \int e^{x_4} dt + x_4} dt + C_3 \\ x_4 = \ln\left(-\dfrac{1}{a_4(t + C_4)}\right). \end{cases}$$

После несложных преобразований получаем явный вид геодезических, проходящих через единицу группы:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_4(1 - a_4 t)}\left(a_1 + \dfrac{a_1}{p}\ln(1 - a_t t)^2 + \left(2\dfrac{a_1}{p} - a_2\right)\ln(1 - a_4 t) + 2\dfrac{a_1}{p} - a_2\right) + \dfrac{1}{a_4}\left(a_2 - a_1 - 2\dfrac{a_1}{p}\right) \\ x_2 = \dfrac{1}{a_4(1 - a_4 t)}\left(-\dfrac{a_1}{p}\ln(1 - a_4 t) - \dfrac{a_1}{p} + a_2\right) + \dfrac{a_1}{a_4 p} - \dfrac{a_2}{a_4} \\ x_3 = \dfrac{1}{a_4^2(1 - a_4 t)}\left(-\dfrac{a_1^2}{2} - 2\dfrac{a_1^2 \ln(1 - a_4 t)}{p} - \dfrac{a_1^2}{a_4 p} + a_1 a_2(\ln(1 - a_4 t) + 1) - \dfrac{1}{2} pa_2^2\right) + \dfrac{a_3}{a_4} + C(1 - a_4 t) \\ x_3 = \dfrac{1}{a_4^2(1 - a_4 t)}\left(-\dfrac{a_1^2}{2} - 2\dfrac{a_1^2 \ln(1 - a_4 t)}{p} - \dfrac{a_1^2}{a_4 p} + a_1 a_2(\ln(1 - a_4 t) + 1) - \dfrac{1}{2} pa_2^2\right) + \dfrac{a_3}{a_4} + C(1 - a_4 t), \end{cases}$$

где $C=\frac{1}{a_4^2}\left(\frac{a_1^2}{2}+\frac{a_1^2}{a_4 p}-a_1 a_2+\frac{1}{2} p a_2^2\right)-\frac{a_3}{a_4}$.

Заметим, что найденные в настоящей работе геодезические определены не для всех значений аффинного параметра, следовательно, пространства 5 а и 5 б являются геодезически неполными (ранее, в работе (Красильников, 1988), это было показано другими методами), однако в них выполняется условие причинности, т. е. отсутствует машина времени (Красильников, 1989). В (Левичев, 1992, с. 123) отмечается, что причинная геодезическая полнота является минимальным условием, при котором пространство-время можно считать свободным от сингулярностей. Из явного вида полученных уравнений очевидным образом следует, что пространства 5 а и 5 б от сингулярностей не свободны.

ЛИТЕРАТУРА

Красильников М.П. Причинная структура геодезически полных левоинвариантных лоренцевых метрик на одной четырёхмерной группе Ли // Сибирский математический журн. – Новосибирск, 1988. – 10 с. – Деп. в ВИНИТИ 09.03.1988, № 2997–В88.

Астраков С.Н., Левичев А.В., Репнин А.Е. Канонический вид левоинвариантых лоренцевых метрик на одной четырёхмерной группе Ли // Сибирский математический журн. – Новосибирск, 1987. – 21 с. – Деп. в ВИНИТИ 05.12.1987, № 8331–В.

Левичев А.В. Методы исследования причинной структуры однородных лоренцевых многообразий // Сибирский математический журн. – 1990. – Т. 31. – № 3. – С. 39–54.

Красильников М.П. Причинная структура левоинвариантных лоренцевых метрик на одной четырёхмерной группе Ли // Топологические пространства и их отображения. – Рига, 1989. – С. 81–85.

Левичев А.В. Три полностью искажённые однородные лоренцевы пространства // Тр. ин-та математики. – Новосибирск, 1992. – С. 122–131.